Brat

Elena Diana Brătucu

METODOLOGIA REZOLVĂRII PROBLEMELOR DE MATEMATICĂ ÎN CICLUL PRIMAR

- Ghid metodologic -

Craiova, 2021

Brat

CUPRINS

Brat

I. INTRODUCERE

Alegerea temei acestui ghid a fost determinată în special de importanţa pe care o are matematica în zilele noastre, fiind un instrument fără pereche pentru dezvoltarea gândirii, curiozităţii, capacităţii de a stabili repede legături, de a sesiza esenţialul cu scopul de a-i face pe elevi să se orienteze cu uşurinţă în cadrul situaţiilor problematice, calităţi absolut necesare cerute de practică, de societatea contemporană.

Am observat că elevii care s-au dovedit a fi buni rezolvatori de probleme de matematică au avut rezultatele foarte bune şi la celelalte discipline şi în clasele gimnaziale.

Dacă reuşim să-i facem pe copil să înţeleagă noţiunile matematice, să ştie să le aplice în mod creator în diverse situaţii, înseamnă că am reuşit să-1 facem stăpân pe zestrea lui mintală.

De asemenea, printr-un sistem logic de predare, folosind metode şi procedee adecvate particularităţilor de viaţă noi, putem obţine rezultate bune şi foarte bune în activitatea de însuşire a cunoştinţelor şi formare a deprinderilor, putem dezvolta capacităţile intelectuale, contribuind la formarea gândirii creatoare.

Dezvoltarea creativităţii şi gândirii logice a elevilor din toate clasele ciclului primar este o preocupare permanentă pe care am urmărit-o prin: rezolvarea problemelor printr-o singură operaţie, prin mai multe operaţii; formularea întrebărilor problemei; modificarea, completarea enunţului problemei; rezolvarea problemei prin mai multe moduri; compunerea problemelor pe baza expresiilor matematice date; rezolvarea problemelor prin operaţiile date. Folosirea acestui sistem de lucru a dus la formarea deprinderilor intelectuale, a tehnicilor de lucru şi antrenarea tuturor operaţiilor gândirii creatoare.

Consider că rezolvarea problemelor de matematică este principala activitate prin care se poate realiza obiectivul fundamental al matematicii în ciclul primar, acela de a forma gândirea logică a şcolarilor mici.

Activitatea de rezolvare de probleme are bogate valenţe formative în personalitatea elevilor. În cadrul ei, aceştia îşi valorifică cunoştinţele matematice şi sunt puşi în situaţia de a descoperi ei înşuşi modalităţi de rezolvare, de a descoperi soluţia, de a formula ipoteze şi apoi de a le verifica, de a face asociaţii de idei şi corelaţii inedite. Deci rezolvarea problemelor pune la încercare în cel mai înalt grad capacităţile intelectuale ale elevilor, le solicită acestora toate disponibilităţile psihice, în special inteligenţa, motiv pentru care şi în ciclul primar programa de matematică acordă problemelor o foarte mare atenţie.

Efortul pe care îl face elevul în rezolvarea conştientă a unei probleme presupune o mare mobilizare a proceselor psihice cognitive, volitive şi motivaţional-afective.

Brat

Dintre cele cognitive, cea mai solicitată şi antrenată este gândirea, prin operaţiile logice de analiză, sinteză, comparaţie, abstractizare şi generalizare.

Prin rezolvarea problemelor de matematică elevii îşi formează deprinderi eficiente de muncă intelectuală, care se vor reflecta pozitiv şi în studiul altor discipline. De asemenea contribuie la cultivarea şi educarea unor calităţile moral-volitive, generează la elevi un simţ al realităţii de tip matematic, formându-le deprinderea de a rezolva şi alte probleme practice din viaţa zilnică. Rezolvarea problemelor de matematică contribuie la clarificarea, aprofundarea şi fixarea cunoştinţelor învăţate la acest obiect de studiu. În acelaşi timp, explicarea multora dintre problemele teoretice se face prin rezolvarea uneia sau mai multor probleme în cadrul cărora de subliniază o proprietate, definiţie sau regulă ce urmează a fi învăţate.

Deci, din ceea ce bine este ştiut şi demonstrat în nenumărate rânduri, activitatea de rezolvare a problemelor de matematică are bogate valenţe formative.

Dar ce înseamnă "a rezolva o problemă"? Înseamnă a găsi o ieşire dintr-o dificultate, a găsi o cale de a ocoli un obstacol, a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil.

A găsi soluţia unei probleme este o performanţă specifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul speciei umane, se poate spune că, dintre toate îndeletnicirile omeneşti, cea de rezolvare a problemelor este cea mai caracteristică.

Spre deosebire de exerciţiu în care majoritatea elevilor aplică un set de reguli de rutină, pentru a ajunge la un răspuns, pentru a rezolva o problemă, faci pauză şi ... reflectezi pentru găsirea versiunii matematice a problemei.

De o importanţă deosebită devine acum transformarea (punerea) în exerciţiu a versiunii matematice ca rezultat al conştientizării operaţiilor matematice necesare. Înţelegerea (sesizarea, intuirea, relevarea, ...) situaţiilor aditive, situaţiilor subatractive, situaţiilor multiplicative, situaţiilor de împărţire devine esnţială pentru reuşita acestei transformări. Iar după transformare, cunoscând cele patru operaţii şi proprietăţile lor, nu mai este o problemă atât la propriu cât la figurat ca să obţinem soluţia.

Aşa cum relevăm în schema de rezolvare a unei probleme, obstacolul cognitiv, dificultatea sau situaţia contradictorie ce apare din punct de vedere teoretic sau practic în situaţia iniţială poate fi depăşit(ă) numai printr-o atribuire de sens (matematic).

Rămâne astfel de maximă actualitate îndemnul de acum mai bine 2000 de ani, făcut de Plutarh: *"Capul copilului nu este un vas pe care să-l umpli, ci o făclie pe care s-o aprinzi, astfel încât, mai târziu să lumineze cu lumină proprie ."*

"Acolo unde unii doar privesc, eu văd. Acolo unde unii doar văd, eu înţeleg" ar trebui să fie dictonul cu care să se mândrească fiecare dintre elevii noştri.

Brat

Să vrea, să vadă (operaţia necesară), să poată să o vadă şi în sfârşit să ştie să o vadă sunt etape în conştientizarea matematicii ciclului primar.

Trebuie să-i dăm ocazia copilului “să matematizeze” înainte de “a aritmetiza”. Matematizarea implică un model al realului, aritmetica presupune formalizarea.

Care poate fi sensul învăţării matematicii pentru elevi, care au memorat perfect tabla adunării, tabla înmulţirii, şi ei nu sesizează, pentru versiunea matematică a unei probleme, dacă, şi/sau când este nevoie de o anumită operaţie?

Ce-ar trebui să citim în ochii unei învăţătoare ai cărei elevi răspund în cor “18 minute” la întrebarea din problema: “Pentru a fierbe un ou, apa trebuie să clocotească 3 minute. Câte minute trebuie să clocotească apa pentru a fierbe 6 ouă?”

Satisfacţia că toţi elevii cunosc “pe dinafară”– atenţie la sensul ghilimelelor – tabla înmulţirii sau jena că niciunul dintre ei nu a înţeles sensul operaţiei de înmulţire?

“Aritmetica – avertiza acum două sute de ani Gheorghe Asachi – *trebuie să se înveţe ca un mijloc de deprindere a inteligenţei, iar nu în chip mecanic sau ca un lucru numai de ţinut minte .”*

Brat

II. FUNDAMENTE TEORETICE: PSIHOPEDAGOGICE ŞI METODOLOGICE

2.1. Noţiunea de problemă şi de rezolvare a problemelor

Cineva spunea cu multă poezie: *„Intrarea în cetatea cunoaşterii se face pe podul matematicii.”*

Prin acest pod – o altă metaforă care apropie matematica de comunicare – se înţelege o limbă şi ea construită pentru înţelegere.

Dar ce facem când vrem să stăpânim o limbă străină? Învăţăm cuvintele, dar şi gramatica, echivalentul regulilor în matematică şi apoi ne perfecţionăm citind lectură, ceea ce în matematică înseamnă *rezolvarea de probleme.*

Rezolvarea de probleme trebuie privită ca o poetică a matematicii.

Dar până la urmă, ce este o problemă ?

Un răspuns satisfăcător ar fi cel dat de *Paul Fraisse: ”Orice situaţie în care răspunsul nu poate fi dat imediat constituie o problemă.”*

Altfel spus, o problemă este o situaţie nouă, necunoscută, în faţa căreia mă aflu şi pe care trebuie să o rezolv, să iau o decizie, să găsesc o soluţie.

„*A rezolva o problemă* – spune George Polya – *înseamnă a găsi o ieşire dintr-o dificultate a găsi o cale de a ocoli un obstacol, a atinge un obiectiv care nu este direct accesibil .”*

„A găsi soluţia unei probleme este o performanţă apecifică inteligenţei, iar inteligenţa este apanajul specific speciei umane” completează J. James.

Dar oare pentru a rezolva o problemă este suficientă doar inteligenţa?

Pentru a rezolva un exerciţiu, unii aplică un set de reguli de rutină spre a ajunge la răspuns.

Pentru a rezolva o problemă, reflectezi, îţi aduci aminte o problemă similară, păşeşti pe „urma” lăsată în minte sau inventezi paşi pe care nu i-ai mai făcut până la abordarea acestei probleme.

Avertizează însă George Poya: *„A rezolva o problemă imitând metoda folosită în rezolvarea unei probleme poate fi o treabă uşoară, dacă problemele sunt asemănătoare, mai grea sau imposibilă, dacă asemănarea nu este prea mare.”*

Nevoia, din partea rezolvitorului, de a crea metode este ceea ce deosebeşte un exerciţiu de o problemă. Pe măsură ce îşi însuşeşte modalităţi de rezolvare generale şi unitare, pentru rezolvitor unele probleme devin simple exerciţii.

Brat

Pentru un elev din ciclul primar, „Cum putem împărţi 96 de creioane la 24 de copii?” poate fi o problemă, dar pentru un elev de gimnaziu este un exerciţiu de rutină: „Cât este 96:24?”. Exersarea este un ajutor preţios în învăţarea matematicii. Exerciţiile ne ajută să reţinem concepte, proprietăţi, procedee care se pot aplica în rezolvarea problemelor.

Rezolvarea de probleme este o acţiune continuă în ciclul primar şi nu numai. Ea începe încă din primele ore de matematică şi se finalizează în clasa a IV-a prin rezolvarea de probleme utilizând metoda figurativă, cu probleme care necesită mai mult de trei operaţii.

Învăţătorul care vrea să imprime elevilor săi o atitudine corectă în abordarea problemelor trebuie să-şi fi însuşit el însuşi o astfel de atitudine.

Ce spune problema? Ce este dat şi ce trebuie aflat? Ai determinat datele cunoscute? Sunt suficiente, sunt redundante? Se poate găsi vreo legătură între problema noastră şi o problemă care se rezolvă mai simplu sau care se rezolvă direct? Acestea sunt întrebările care trebuie puse mai întâi de învăţătoare, apoi de elev sieşi.

Învăţătorul are în faţă o sarcină dublă cu laturi în parte contradictorii. El trebuie să pună pe elev deopotrivă în situaţiile:

- de a învăţa matematică,
- de a face matematică.

De aceea prima şi cea mai importantă îndatorire a învăţătorului în predarea matematicii este de acorda atenţia cuvenită metodologiei de rezolvare a problemelor, mai clar să asigure experienţa de gândire în toate genurile de „matematică”.

Direcţia principală pe care o urmăreşte orice bun învăţător este aceea prin care transformă rezolvarea anumitor (tipuri de) probleme în cele din urmă în simple exerciţii, asigurând în final elevilor o cunoaştere perfectă şi sigură a unor procedee de lucru.

Învăţătorul trebuie să rezolve el însuşi foarte multe probleme. Dar acest lucru nu se poate face numai din obligaţie profesională. Adevăratul dascăl are el însuşi plăcerea de a rezolva problema, de a se entuziasma pentru cele „frumoase”, de a le păstra în atenţie şi semnala altora.

Continuă G. Polya: *A şti să rezolvi problema este o îndemânare practică – o deprindere – cum este înotul, schiul sau cântatul la pian; care se poate învăţa numai prin imitare şi exerciţiu. Dacă vreţi să-i învăţaţi pe copii înotul, trebuie să-i băgaţi în apă, iar dacă vreţi să-i învăţaţi să rezolve probleme, trebuie să-i puneţi să rezolve probleme.”*

De asemenea învăţătorul poate înlocui recomandarea „rezolvă cât mai multe probleme” cu recomandarea „învaţă cât mai mult din rezolvarea fiecărei probleme”!

Brat

În fapt, bunul învăţător nu-i „învaţă” matematică pe elevii săi, ci îi provoacă prin probleme propuse spre rezolvare să gândească matematic, punându-i frecvent în situaţia de a „matematiza” aspecte reale din viaţă.

Pentru atingerea obiectivului-cadru „Dezvoltarea capacităţiilor de explorare/investigare şi rezolvare de probleme”, prevăzut în programa şcolară pentru finele clasei a IV-a, trebuie dezvoltate la copil următoarele *capacităţi:*

- capacitatea de a înţelege semnificaţia valorii numerice, datele problemei şi a relaţiilor ce se dau între elemente cunoscute;
- capacitatea de a înţelege condiţia problemei, relaţia ascunsă dintre datele problemei şi necunoscută (orice raţionament va fi îndrumat pe calea întâmpinării necunoscutei);
- capacitatea cuprinderii în raza gândirii nu doar a unor fragmente succesive pe care să le pună cap la cap, ci a întregului raţionament de rezolvare a problemei.

Analiza problemelor este un capitol util pentru învăţătorul care vrea să facă schimbări în predare, şi anume în trecerea de la ipostaza de transmiţător de informaţii la cea de organizator al unor activităţi variate de învăţare pentru toţi copiii, în funcţie de nivelul şi ritmul propiu de învăţare al fiecăruia.

2.2. Valenţe formative ale activităţii de rezolvare a problemelor

Prin rezolvarea problemelor de matematică elevii îşi formează deprinderi eficiente de muncă intelectuală, care se vor reflecta pozitiv şi în studiul altor discipline de învăţământ. În acelaşi timp, activităţile matematice de rezolvare şi compunere de probleme contribuie la îmbogăţirea orizontului de cultură generală al elevului prin utilizarea în conţinutul problemelor a unor cunoştinţe pe care nu le studiază la alte discipline de învăţământ. Este cazul informaţiilor legate de distanţă, viteză, timp, preţ de cost, plan de producţie, normă de producţie, cantitate, dimensiune, greutate, arie, durata unui fenomen etc.

Problemele de aritmetică, fiind strâns legate prin însuşi enunţul lor de viaţă, de practică, dar şi de rezolvarea lor, generează la elevi un simţ al realităţii de tip matematic, formându-le deprinderea de a rezolva şi alte probleme practice pe care viaţa le pune în faţa lor. Rezolvarea sistematică a problemelor de orice tip sau gen are drept efect formarea la elevi a unor seturi de priceperi, deprinderi şi atitudini pozitive care le dau posibilitatea de a rezolva în mod independent probleme, de a compune ei înşişi probleme.

Prin conţinutul lor, prin tehnicile de abordare şi soluţionare utilizate, rezolvarea problemelor de matematică conduce la formarea şi educarea unei noi atitudini faţă de muncă, a spiritului de disciplină conştientă, dar şi a spiritului emulativ, a competiţiei cu sine însuşi şi

Brat

cu alţii. Nu putem omite nici efectele benefice pe planul valorilor autoeducative, al conduitei rezolutive.

Introducerea elevilor în activitatea de rezolvare a problemelor se face progresiv, antrenându-i în depunerea de eforturi mărite pe măsură ce înaintează în studiu şi pe măsură ce experienţa lor rezolutivă se îmbogăţeşte. Astfel, odată cu învăţarea primelor operaţii aritmetice (de adunare şi scădere) se începe rezolvarea pe cale orală şi pe bază de intuiţie, a primelor probleme simple. Treptat, elevii ajung să rezolve aceste probleme şi în formă scrisă. Un moment de salt îl costituie trecerea de la rezolvarea problemelor simple la rezolvarea problemelor compuse.Varietatea problemelor pe care le rezolvă elevii sporeşte efortul mintal şi eficinţa formativă a activiăţii de rezolvare a problemelor. Trebuie să delimităm însă două situaţii în rezolvarea problemelor, situaţii care solicită în mod diferit mecanismele intelectuale ale elevilor:

a) Când elevul are de rezolvat o problemă asemănătoare cu cele rezolvate anterior sau o problemă-tip (care se rezolvă prin aceeaşi metodă, comună tuturor problemelor de tipul respectiv). În acest caz elevul este solicitat să recunoască tipul de problemă căruia îi aparţine problema dată. Prin rezolvarea unor probleme care se încadrează în aceeaşi categorie, având acelaşi mod de organizare a judecăţilor, acelaşi raţionament, în mintea elevilor se fixează principiul de rezolvare a problemei, schema mintală de rezolvare. În cazul problemelor tipice, această schemă se fixează ca un algoritm de calcul, algoritmul de rezolvare a problemei.

b) În cazul când elevul întâlneşte probleme noi, necunoscute, unde nu mai poate aplica o schemă mintală cunoscută, gândirea sa este solicitată în găsirea căii de rezolvare. Experienţa şi cunoştinţele de rezolvare, deşi prezente, nu mai sunt orientate şi mobilizate spre determinarea categoriei de probleme şi spre aplicarea algoritmului de rezolvare. Elevul trebuie ca, pe baza datelor şi a condiţiei problemei, să descopere drumul spre aflarea necunoscutei. În felul acesta realizează un act de creaţie, care constă în restructurarea datelor propriei sale experienţe şi care este favorizat de nivelul flexibilităţii gândirii sale, de capacitatea sa combinatorică şi anticipativă. În rezolvarea unei probleme, lucrul cel mai important este construirea raţionamentului de rezolvare, adică a acelui şir de judecăţi orientate către descoperirea necunoscutei.

Rezolvarea oricărei probleme trece prin mai multe etape. În fiecare dintre aceste etape, datele problemei apar în combinaţii noi, reorganizarea lor la diferite nivele ducând către soluţia problemei. Este vorba de un permanent proces de analiză şi sinteză (prin care elevul separă şi reconstituie, desprinde şi construieşte raţionamentul care conduce la soluţia problemei), de o îmbinare aparte a analizei cu sinteza, caracterizată prin aceea că diferitele

Brat

elemente luate în consideraţie îşi dezvăluie mereu noi aspecte (analiza) în funcţie de combinaţiile în care sunt plasate (sinteza).

Procesul de rezolvare a unei probleme presupune deducerea şi formularea unor ipoteze şi verificarea lor. Dar formularea acestor ipoteze nu este rezultatul unei simple inspiraţii, ci presupune atât un fond de cunoştinţe pe care elevul le aplică în rezolvarea problemelor, cât şi o gamă variată de deprinderi şi abilităţi intelectuale necesare în procesul rezolvării problemelor. Diferitele ipoteze (enunţuri ipotetice care ne vin în minte în legătură cu problema pusă) nu apar la întâmplare. Ele iau naştere pe baza asociaţiilor, pe baza cunoştinţelor asimilate anterior. Cu cât cunoştinţele sunt mai profunde, cu atât şansele ca ipotezele care se nasc în mintea rezolvitorului îl conduc mai repede la o soluţie, cu cât fondul din care sunt alese ipotezele este mai bogat cu atât soluţia este mai bună. De aceea, în orice domeniu, capacitatea de a rezolva probleme complexe este condiţionată de o solidă pregătire de specialitate, dar şi de cultura generală.

În rezolvarea problemelor intervin o serie de tehnici, procedee, moduri de acţiune, deprinderi şi abilităţi de muncă intelectuală independentă. Astfel sunt necesare unele deprinderi şi abilităţi cu caracter mai general cum sunt: orientarea activităţii mintale asupra datelor problemei, punerea în legătură logică a datelor, capacitatea de a izola ceea ce este cunoscut de ceea ce este necunoscut, extragerea acelor cunoştinţe care ar putea servi la rezolvarea problemei precum şi unele deprinderi specifice referitoare la detaliile acţiunii (cum sunt cele de genul deprinderilor de calcul).

Cu toată varietatea lor, problemele de matematică nu sunt independente, izolate, ci fiecare problemă se încadrează într-o anumită categorie. Prin rezolvarea unor probleme care se încadrează în aceeaşi categorie, având acelaşi mod de organizare a judecăţilor, deci acelaşi raţionament, în mintea copiilor se conturează schema de rezolvare, ce se fixează ca un algoritm sau un semialgoritm de lucru, care se învaţă, se transferă şi se aplică la fel ca regulile de calcul. Aflarea căii de rezolvare a unei probleme este mult mai uşurată în cazul în care elevul poate subsuma problema nouă unei categorii, unui tip determinat de probleme, deja cunoscute. Dar această subsumare se poate face corect numai dacă elevul a înţeles particularităţile tipice ale categoriei respective, raţionamentul rezolvării ei, dacă o poate descoperi şi recunoaşte în orice condiţii concrete s-ar prezenta problema (domeniul la care se referă, mărimea şi natura datelor etc.).

De o mare importanţă în rezolvarea problemelor este înţelegerea structurii problemei şi a logicii rezolvării ei.

Elevul trebuie să cuprindă în sfera gândirii sale întregul „film” al desfăşurării raţionamentului şi să-l reţină drept element esenţial, pe care apoi să-l generalizeze la întreaga

Brat

categorie de probleme. Pentru a ajunge la generalizarea raţionamentului comun al unei categorii de probleme, elevii trebuie să aibă formate capacităţile de a analiza şi de a înţelege datele problemei, de a sesiza condiţia problemei şi de orienta logic şirul de judecăţi către întrebarea problemei.

Când se rezolvă o problemă compusă, aparent elevul rezolvă pe rând mai multe probleme simple. În esenţă, nu este vorba de probleme simple care se rezolvă izolat. Acestea fac parte din structura problemei compuse, rezolvarea fiecăreia dintre ele făcându-se în direcţia aflării necunoscutei, fiecare problemă simplă rezolvată reprezentând un pas înainte, o verigă pe calea raţionamentului problemei compuse, de natură să reducă treptat numărul datelor necunoscute.

2.3. Locul şi rolul problemelor în dezvoltarea gândirii logice şi creative

Rezolvarea problemelor are un rol educativ, prin contribuţia valoroasa pe care o aduce la dezvoltarea facultăţilor mintale, cu deosebire la dezvoltarea judecaţii antrenând în cea mai mare măsura operaţiile logice de analiză şi sinteză, de comparaţie, abstractizare şi generalizare.

Activitatea gândirii se manifestă în mod esenţial în rezolvarea de probleme, prin mijlocirea cunoştinţelor atunci când în calea activităţii practice sau teoretice apare un obstacol, iar dacă acest obstacol nu există, dacă scopul poate fi atins pe baza deprinderilor formate anterior şi a unor rezolvări existente de-a gata în experienţa câştigată, atunci gândirea nu va fi confruntată cu o problema nouă, deci nu va exista o problemă de rezolvat.

O problemă este cu atât mai dificila, cu cât diferă mai mult de acelea pe care le-am rezolvat anterior şi deci cu cât situaţia noua cere o restructurare mai adâncă a experienţei trecute.

Caracterul abstract al gândirii de cunoaştere senzorială şi de activitate practică, se realizează de către învăţător începând din clasa I. Deci pentru a fi înţeleşi de elevii mici în ceea ce explicam, iar ei să poată gândi şi asimila, trebuie să folosim material didactic, care înfăţişează obiecte, fenomene, animale, flori, păsări.

Se poate spune deci, că intenţia reprezintă primul pas pe calea care duce la cunoaşterea lumii reale, la sesizarea proprietăţilor interioare ale lucrurilor, la stabilirea pe baza unor procese de gândire a legilor ştiinţifice. Datorită intuiţiei se formează mai repede şi mai clar, reprezentările şi noţiunile despre obiecte, fapte şi fenomene, sunt sesizate mai bine legăturile şi dependenţa dintre ele. Dar elevul mic trebuie să ajungă la stadiul acela care permite ca pe

Brat

baza reprezentărilor spaţiale şi a gândirii să rezolve probleme ce se pun fară ajutorul materialului intuitiv.

Se pot face următoarele precizări:

-Lipsa materialului intuitiv frânează însuşirea cunoştinţelor, procesul de formare a reprezentărilor spaţiale;

- Abuzul materialului intuitiv frânează formarea şi dezvoltarea gândirii abstracte, îngreunează procesul de abstractizare si generalizare. Cu alte cuvinte există două extreme de care trebuie să ne ferim: ignorarea intuiţiei şi exagerarea folosirii.

La început mulţi copii se desprind greu de obiectele concrete în procesul gândirii. Se observă că ei nu pot socoti dacă nu au la îndemână material didactic şi recurg frecvent la socotitul pe degete, ceea ce demonstrează că gândirea şcolarului de vârstă mică mai păstrează în mare măsură un caracter intuitiv:

- Educarea gândirii ca orice fenomen educaţional este mediata de particularităţile psihice ale copiilor;

- Epoca contemporană are nevoi de inteligenţă creatoare, de oameni cu gândire independentă, creativă.

J. Piaget menţionează că "în societatea contemporană însăşi condiţia de existenţă a omului se concentrează tot mai mult către inteligenţă şi creativitate, adică inteligenţa activă".

A rezolva o problemă de matematică înseamnă ca din datele cunoscute să deducem necunoscuta care se află în relaţii neexprimate în textul problemei şi care trebuie descoperit.

Practic în raţionamentul problemei intervine raţionamentul matematic; care va fi cu atât mai complex şi mai riguros cu cât necunoscuta se găseşte în relaţii mai îndepărtate, mai mascate de datele cunoscute ale problemei. Procesul rezolvării unei probleme se prezintă ca o activitate mintală în căutare, în cursul căreia în baza datelor problemei sunt emise diferite ipoteze care sunt supuse verificării pe rând.

Selecţionarea şi ordonarea problemelor după gradul de dificultate pe care îl ridică în rezolvare îi ajută pe copii să parcurgă drumul ascendent al formării capacitaţilor necesare rezolvării problemelor printr-un efort gradat, printr-un antrenament permanent.

Raţionamentul de rezolvare a problemei se poate generaliza la niveluri diferite şi cu cât nivelul de generalizare este mai înalt, cu atât principiul de rezolvare este mai cuprinzător şi se aplică la un număr mai mare de probleme. Pentru a forma la elevi o gândire creatoare trebuie puşi în situaţii diferite, mereu noi. In acest scop se utilizează o varietate de procedee:

- Dezvoltarea şi complicarea treptata a unei probleme rezolvate;

- Rezolvarea problemei prin mai multe procedee şi alegerea căii cele mai economicoase, reformarea problemei prin introducerea necunoscutei drept cunoscută şi altele.

Brat

Rezolvarea problemelor exercită o influenţă formativă asupra elevilor pe tot parcursul studierii matematicii.

Cu cât înaintăm către clasele mai mari, cu atât mai mult acestea se referă la formarea unei gândiri profunde şi perspicace, a exactităţii şi corectitudinii, a spiritului de iniţiativă şi independenţă.

III. METODOLOGIA ACTIVITĂŢII DE REZOLVARE A PROBLEMELOR

3.1. Etapele rezolvării problemelor

În activitatea de rezolvare a unei probleme se parcurg mai multe etape. În fiecare etapă are loc un proces de reorganizare a datelor şi de reformulare a problemei, pe baza activităţii de orientare a rezolvitorului pe drumul şi în direcţia soluţiei problemei.

Aceste etape sunt:

A. Cunoaşterea enunţului problemei

B. Înţelegerea enunţului problemei

C. Analiza problemei şi întocmirea planului logic

D. Alegerea şi efectuarea operaţiilor corespunzătoare succesiunii judecăţilor din plan logic

E. Activităţi suplimentare:

- verificarea rezultatului
- scrierea sub formă de exerciţiu
- găsirea altei căi sau metode de rezolvare
- generalizare
- compunere de probleme după o schemă asemănătoare.

A. Cunoaşterea enunţului problemei

„O problemă bine înţeleasă este pe jumătate rezolvată” Eugen Rusu.

Este etapa de început în rezolvarea oricărei probleme. Cunoaşterea enunţului probleme se realizează prin citire de către învăţător sau de elevi sau prin enunţare orală. Se va repeta problema de mai multe ori, până la însuşirea de către toţi elevii. Se vor scoate în evidenţă anumite date şi legăturile dintre ele, precum şi întrebarea problemei. Se vor scrie pe tablă şi pe caiete datele problemei (folosindu-se scrierea pe orizontală sau pe verticală).

Brat

B. Înţelegerea enunţului problemei

Nu este posibil ca elevul să formuleze ipoteze şi să construiască raţionamentul rezolvării problemei decât în măsura în care cunoaşte termenii în care se pune problema. Enunţul problemei conţine un minim necesar de informaţii. Datele şi condiţia problemei reprezintă termenii de orientare a ideilor, a analizei şi sintezei, precum şi a generalizărilor ce se fac treptat pe măsură ce se înaintează spre soluţie. Întrebarea problemei indică direcţia în care trebuie să se orienteze formularea ipotezelor. Acest minimum de informaţii trebuie recepţionat în mod optimal de către elevi prin citirea textului problemei, prin ilustrarea cu imagini sau chiar cu acţiuni când este cazul.

C. Analiza problemei şi întocmirea planului logic

Este etapa în care se produce eliminarea aspectelor ce nu au semnificaţie matematică şi se elaborează reprezentarea matematică a enunţului problemei.

Aceasta este etapa în care se „construieşte" raţionamentul prin care se rezolvă problema, adică drumul de legătură dintre datele problemei şi necunoscută. Prin exerciţiile de analiză a datelor, a semnificaţiei lor, a relaţiilor dintre ele şi a celor dintre date şi necunoscute se ajunge să ne ridicăm de la situaţiile concrete pe care le prezintă problema la nivelul abstract care vizează relaţiile dintre parte şi întreg.

Transpunând problema într-un desen, într-o imagine sau într-o schemă, evidenţiem esenţa matematică a problemei, adică reprezentarea matematică a conţinutului ei. În momentul în care elevii au transpus problema în relaţii matematice, soluţia este ca şi descoperită.

D. Alegerea şi efectuarea operaţiilor corespunzătoare succesiunii din planul logic

Această etapă constă în alegerea şi efectuarea calculelor din planul de rezolvare, în conştientizarea semnificaţiei rezultatelor parţiale ce se obţin prin calculele respective şi, evident, a rezultatului final.

E. Activităţi suplimentare după rezolvarea problemei

Ea constă în verificarea soluţiei problemei, în găsirea şi a altor metode de rezolvare şi de alegere justificată a celei mai bune. Este etapa prin care se realizează şi autocontrolul asupra felului în care s-a însuşit enunţul problemei, asupra raţionamentului realizat şi a demersului de rezolvare parcurs.

După rezolvarea unei probleme se recomandă – pentru a se scoate în evidenţă categoria din care face parte problema – fixarea algoritmului ei de rezolvare, scrierea

Brat

(transpunerea) datelor problemei şi a relaţiilor dintre ele într-un exerciţiu sau, după caz, în fragmente de exerciţiu. Prin rezolvarea de probleme asemănătoare, prin compunerea de probleme, cu aceleaşi date sau schimbate, dar rezolvabile după acelaşi exerciţiu, învăţătorul descoperă cu elevii schema generală de rezolvare a unei categorii de probleme. Este o cerinţă care nu duce la schematizarea, la fixitatea sau rigiditatea gândirii, ci, din contră, la cultivarea şi educarea creativităţii, la antrenarea sistematică a intelectului elevilor.

Procesul de rezolvare a problemelor antrenează în sistem elementele ajunse la automatizare, dar mai ales corelează elemente a căror acţiune trebuie să rămână în permanenţă sub controlul conştiinţei. Abilităţile matematice de care depinde rezolvarea problemelor sunt fie cu caracter general, adică intră în acţiune la rezolvarea oricărei probleme, fie specifice şi se aplică la probleme tipice, ori la detaliile acţiunilor (procedee de calcul) şi, în acest caz, au statut de deprinderi.

Sarcina principală a învăţătorului când pune în faţa elevilor o problemă este să-i conducă pe aceştia la o analiză profundă a datelor, analiză care să le permită o serie de reformulări care să-i apropie de soluţie. E necesară analiza datelor în special datorită lipsei unei vederi de ansamblu (a perspectivei) asupra problemei şi conştientizării întregului raţionament de rezolvare a acesteia.

O problemă este cu atât mai dificilă cu cât ea diferă mai mult de problemele rezolvate anterior, deci cu cât situaţia nouă cere o restructurare mai profundă a experienţei anterioare.

Retorica etapelor rezolvării unei probleme:

1. Înţelegerea problemei

a) Înţelegerea enunţului problemei în ansamblul său, fără a avea în vedere detaliile;

b) Separarea părţilor principale ale problemei şi reprezentarea lor (dacă este posibil) printr-un desen convenţional

După G. Polya, părţile principale ale unei „probleme de aflat" sunt: datele, necunoscuta şi condiţia, iar ale unei „probleme de demonstrat" sunt: ipoteza (ceea ce se dă) şi concluzia (ceea ce trebuie demonstrat).

c) Examinarea fiecărei date, fiecărei componente a necunoscutei, fiecărei clauze a condiţiei

Avansarea unor ipoteze asupra soluţiei:

- Poate fi satisfăcută condiţia?
- Este condiţia suficientă pentru a determina necunoscuta?
- Sau este insuficientă?
- Sau redundantă?
- Sau contradictorie?

Brat

2. Întocmirea unui plan

- Problema se încadrează într-unul din tipurile studiate?

Dacă da, trebuie să ne amintim metoda prin care se rezolvă problemele de tipul respectiv.

Dacă nu, recurgem la metodele generale de raţionament: analiza şi sinteza.

a) Metoda *analizei* constă în a face raţionamentul problemei pornind de la necunoscută la date.

- Să cercetăm necunoscuta!

- Din ce mărimi rezultă ea?

- Cum pot fi deduse aceste mărimi? (Şi aşa mai departe până ajungem la datele problemei).

b) Metoda *sintezei* constă în a face raţionamentul problemei pornind de la date spre necunoscută.

- Am putea deduce ceva util din datele problemei?

- putem folosi rezultatul obţinut pentru a afla noi mărimi utile în rezolvarea problemei? (Şi aşa mai departe până ajungem la necunoscută).

Indiferent prin ce metodă facem raţionamentul problemei, planul rezolvării se face de la date spre necunoscută!

Planul rezolvării unei probleme de aritmetică trebuie să constituie o înlănţuire de probleme simple, astfel încât soluţia ultimei dintre ele să fie soluţia problemei date!

3. Realizarea planului

Se efectuează succesiv operaţiile care conduc la soluţiile problemelor simple cuprinse în planul de rezolvare.

- Au fost utilizate toate datele?

4. Privire reptrospectivă

a) Apreciere generală asupra rezultatului.

- Poate constitui aceasta soluţia problemei?

B Verificarea rezultatului: se înlocuieşte soluţia în problemă şi se verifică enunţul.

c) Căutarea altor căi de rezolvare a problemei:

- Se putea rezolva problema pe altă cale?

- Există o cale mai directă de rezolvare?

Brat

d) Concluzii:

- Ce am învăţat rezolvând problema?
- Ce-mi poate fi de folos în rezolvarea altor probleme?
- Pot face generalizări?
- Sunt particularizări?

3.2. Criterii de clasificare a problemelor

Adoptăm, după *G.Polya*, o primă clasificare a problemelor în probleme „de aflat" şi probleme „de demonstrat". Această clasificare este inspirată dintr-o tradiţie care durează încă de la Euclid, termenul de problemă „de aflat" corespunzând celui de problemă, iar cel de problemă „de demonstrat" corespunzând termenul de theorema.

Scopul unei probleme „de aflat" este de a găsi necunoscuta problemei. Scopul unei probleme „de demonstrat" este de a arăta că o anumită aserţiune este adevărată sau falsă. Uneori, cele două operaţii – de aflare şi de demonstrare – se pot întâlni în aceeaşi problemă. În matematicile elementare predomină „problemele de aflat".

După *numărul operaţiilor* necesare aflării soluţiei, problemele de aritmetică se clasifică în două mari grupe: probleme simple şi probleme compuse. Se numesc simple problemele în care soluţia se obţine printr-o singură operaţie aritmetică, iar compuse – problemele a căror rezolvare se face cu două sau mai multe operaţii aritmetice.

După *scopul* imediat pe care îl urmăresc (aplicarea unei reguli sau teoreme, dezvoltarea judecăţii, formarea deprinderilor de calcul) problemele se clasifică în:

1. Exerciţii;
2. Probleme teoretice;
3. Probleme practice;
4. Probleme artificiale;
5. Probleme recreative.

1. Exerciţiile

Sunt probleme uşoare, formulate de obicei cu date mici, care servesc pentru aplicarea unei reguli, a unei teoreme demonstrate la ora de curs, sau pentru a pune în evidenţă unele proprietăţi ale numerelor şi operaţiilor". De fapt, dacă ţinem seama că rezolvarea unei probleme implică o dificultate, exerciţiile n-ar trebui să fie încadrate printre probleme.

2. Probleme teoretice

„Problemele care sunt mai grele decât exerciţiile şi care urmăresc prin rezolvarea lor dezvoltarea puterii de judecată, asimilarea temeinică a cunoştinţelor teoretice din aritmetică,

Brat

aflarea diferitelor proprietăţi ale numerelor şi formarea gustului pentru studiul matematicilor, se numesc probleme teoretice”.

3. Probleme practice

„Problemele care conţin date luate din lumea înconjurătoare legate de procesul de producţie, aşa cum se desfăşoară el în realitate în uzine, pe ogoare, în laboratoare, aplicaţii tehnice, din calcule financiare, din comerţ etc...., se numesc probleme practice”.

4. Probleme artificiale

Aceste probleme sunt compuse de autor cu scopul de a da posibilitatea elevilor să aplice o metodă, să folosească anumite reguli sau procedee de calcul. Autorul unei asemenea probleme se străduieşte ca datele şi problema însăşi să fie cât mai aproape de realitate.

Citez din lucrarea lui Gh.A.Chiţei o problemă artificială: „O vulpe urmărită de un ogar are un avans de 49 sărituri înaintea lui. După câte sărituri ogarul va ajunge vulpea, ştiind că el face şase sărituri în timp ce vulpea face şapte sărituri, iar trei sărituri ale ogarului fac cât patru ale vulpii ?”

De ce este artificială această problemă? Pentru că o persoană nu poate număra în acelaşi timp numărul săriturilor făcute de vulpe şi ogar, iar pe de altă parte acestea nu au o mărime constantă. Totuşi, problema este instructivă, prin raţionamentul care conduce la rezolvare.

5. Probleme recreative

„Problemele care conţin chestiuni distractive, cu toate că în rezolvare a lor cer raţionamente riguroase din punct de vedere matematic, se numesc probleme recreative”.

Criterii de clasificare a problemelor matematice:

a) după numărul de operaţii:

- simple;
- compuse;

b) după gradul de generalitate:

- generale;
- tipice;
- recreative;

c) după sfera de aplicabilitate:

- teoretice;
- practice;

d) după conţinut:

- de mişcare;

Brat

- amestec şi aliaj;

- geometrie;

- algebră;

e) după modul de implicare al creativităţii:

- demonstrativ-aplicative;

- reproductiv-creative;

- euristic-creative;

- de optimizare;

f) după rolul de implicare în procesul didactic:

- formativ;

- informativ.

O încercare de a pune „ordine” în multitudinea problemelor de aritmetică, o posibilă clasificare a **problemelor de aritmetică** poate fi urmatoarea:

I. Probleme cu operaţiile relativ evidente

Sunt problemele cel mai des întâlnite în manualele din clasele I-IV. Acestea sunt: 1. Probleme simple;

2. Probleme compuse.

Ca metode de rezolvare sunt, în principal, două: metoda analitică şi metoda sintetică.

II. Probleme tip

1. Probleme care se rezolvă prin metoda figurativă;
2. Probleme de egalare a datelor (metoda reducerii la acelaşi termen al comparaţiei);
3. Probleme de presupunere (metoda falsei ipoteze);
4. Probleme gen rest din rest (metoda mersului invers);
5. Probleme cu mărimi proporţionale, cu două variante:

A. Împărţirea unui număr în părţi direct proporţionale;

B. Împărţirea unui număr în părţi invers proporţionale;

C. Împărţirea unui număr în părţi care luate perechi formează rapoarte date;

6. Probleme de mişcare (bazate pe relaţia d=v x t), cu două variante:

A. În acelaşi sens;

B. În sensuri contrare;

7. Probleme de amestec şi aliaje cu două variante:

A. De categoria I;

B. De categoria a II-a;

Brat

III. Probleme care, depinzând de alcătuirea întrebării şi de date, sunt rezolvate şi încadrate la categoriile specificate mai sus, dar cu conţinut specific:

A. Probleme cu conţinut geometric;

B. Probleme cu conţinut de fizică;

C. Probleme asupra acţiunii şi muncii în comun;

IV. Probleme nonstandard (recreative, rebusistice, de perspicacitate, probleme – joc etc.)

IV. REZOLVAREA PROBLEMELOR SIMPLE

Problemele simple sunt acelea pe care şi le pune copilul zilnic în şcoală, în familie, în timpul jocului şi care sunt ilustrate cu exemple familiare lui. Pentru a-i face să vadă încă din clasa întâi utilitatea activităţii de rezolvare a problemelor este necesar ca micii şcolari să înţeleagă faptul că în viaţa de toate zilele sunt situaţii când trebuie găsit un răspuns.

În această perioadă de început, activitatea de a rezolva şi compune probleme se face numai pe cale intuitivă. De aceea, primele probleme sunt necesar legate de introducerea lor sub formă de joc şi au caracter de probleme-acţiune cărora li se asociază un bogat şi variat material didactic ilustrativ.

Rezolvarea primelor probleme se realizează la un nivel concret, ca acţiuni de viaţă (au mai venit...copii, s-au spart ... baloane, au plecat ... maşini etc.) ilustrate prin imagini sau chiar prin acţiuni executate de copii (copilul merge la magazin, cumpără, plăteşte). În această fază, activitatea de rezolvare a problemelor se află foarte aproape de aceea de calcul.

Deşi rezolvările problemelor simple par uşoare, elevii trebuie familiarizaţi cu toate genurile de probleme care se rezolvă printr-o singură operaţie aritmetică:

4.1.Problemele simple bazate pe adunare pot fi:

a. de aflare a sumei a doi termeni;

b. de aflare a unui număr mai mare cu un număr de unităţi decât un număr dat;

c. probleme de genul „cu atât mai mult”;

Exemplu: Iepurilă a pictat 20 de ouă şi mai are de pictat 6 ouă. Câte ouă va avea pictate în total?

Brat

4.2.Problemele simple bazate pe scădere pot fi:

d. de aflare a diferenţei;

e. de aflare a unui număr care să aibă un număr de unităţi nai puţine decât un număr dat;

f. de aflare a unui termen atunci când se cunosc suma şi un termen al sumei;

g. probleme de genul „cu atât mai puţin";

Exemplu: Radu a rezolvat 24 probleme, iar Dora 47 probleme. Care a rezolvat mai multe probleme şi cu cât?

4.3.Problemele simple bazate pe înmulţire pot fi:

h. de repetare de un număr de ori a unui număr dat;

i. de aflare a produsului;

j. de aflare a unui număr care să fie de un număr de ori mai mare decât un număr dat;

Exemplu: Într-o livadă sunt 9 rânduri de pruni a câte 6 pruni pe fiecare rând. Câţi pruni sunt în livadă?

4.4.Problemele simple bazate pe împărţire pot fi:

k. de împărţire a unui număr dat în părţi egale;

l. de împărţire prin cuprindere a unui număr prin altul;

m. de aflare a unui număr care să fie de un număr de ori mai mic decât un număr dat;

n. de aflare a unei părţi dintr-un întreg;

o. de aflare a raportului dintre două numere.

Exemplu: Mama are 12 portocale pe care le împarte în mod egal celor 3 copiii ai săi. Câte portocale primeşte fiecare copil?

Brat

V. REZOLVAREA PROBLEMELOR COMPUSE

Rezolvarea acestor probleme nu înseamnă, în esenţă, rezolvarea succesivă a unor probleme simple. Nu rezolvarea problemelor simple la care se reduce problema compusă constituie dificultatea principală într-o problemă cu mai multe operaţii, ci legătura dintre verigi, constituirea raţionamentului. De aceea, este necesară o perioadă de tranziţie de la rezolvarea problemelor simple (cu o operaţie) la rezolvarea problemelor compuse (cu două sau mai multe operaţii).

Examinarea unei probleme compuse se face, de regulă, prin metoda analitică sau sintetică. Cele două metode se pot folosi simultan sau poate să predomine una sau alta, caz în care metoda care predomină îşi pune specificul asupra căilor care duc la găsirea soluţiei. Atât o metodă, cât şi cealaltă constau în descompunerea problemei date în probleme simple care, prin rezolvarea succesivă, duc la găsirea soluţiei, iar prin metoda analizei se pleacă de la întrebarea problemei spre datele ei şi stabilirea relaţiilor matematice între ele.

O dată cu analiza logică a problemei se formulează şi planul de rezolvare. Planul trebuie scris de învăţător pe tablă şi de elevi pe caietele lor, mai ales la rezolvarea primelor probleme, scopul fiind acela al formării deprinderilor de a formula întrebări şi pentru alte rezolvări de probleme.

În clasa I, planul problemei se întocmeşte la început oral (elevii neavând suficiente cunoştinţe şi deprinderi de scriere), manieră care se continuă şi în clasa a II-a, în unele situaţii. Se recomandă ca, la clasa a a II-a, planul de rezolvare să se facă oral sau în scris în egală măsură. În clasele a III-a şi a IV-a, după întocmirea planului oral, elevii sunt capabili, datorită deprinderilor de scriere deja formate, să treacă la scrierea planului cu uşurinţă, îndată ce problema a fost examinată. Forma în care poate fi scris planul este variată, dar cea mai eficientă este sub forma întrebărilor.

Rezolvarea problemelor după un plan de rezolvare necesită de multe ori şi folosirea schemelor, desenelor, graficelor etc. Dacă atunci când se predau operaţiile aritmetice se insistă asupra notării cu litere a termenilor şi factorilor, dacă operaţiile aritmetice sunt scrise la modul general şi se cere elevilor să compună probleme simple a aflare a unui termen, a unui factor, a sumei, diferenţei, produsului, câtului, să mărească şi să micşoreze cu atât sau de atâtea ori etc. folosind formule literale, elevii nu vor mai întâmpina greutăţi mari în acţiunile de schematizare şi generalizare a unei probleme compuse prin exerciţiu numeric sau formulă literală.

La întrebarea: câte probleme de matematică să se rezolve într-o lecţie, răspunsul teoreticienilor şi practicienilor este simplu: într-o oră de matematică este preferabil să se

Brat

rezolve 2 – 3 probleme la care să se insiste asupra raţionamentului, asupra diferitelor căi posibile de rezolvare, asupra schemei, punerii în formulă numerică şi literală, compunerii unor probleme analoage pornind de la exerciţiu şi formulă, decât să se rezolve, în mod superficial, mai multe probleme fără respectarea cerinţelor sus-amintite.

Exemple:

Clasa I: În poieniţă sunt 7 oi şi 3 miei. Au plecat 4 oi şi 2 miei. Câte animale au rămas în poieniţă?

Clasa a II-a: Aflaţi cel mai mic număr scris cu trei cifre diferite, având suma cifrelor sale egală cu 4. Adunaţi la el dublul lui 257.

Clasa a III-a: Măreşte de 6 ori câtul numerelor 54 şi 9.

Clasa a IV-a: Pentru o festivitate s-au adus 486 de baloane. Dintre acestea 260 de baloane sunt roşii şi galbene, iar 250 sunt roşii şi albastre. Câte baloane sunt de fiecare culoare ?

Brat

VI. REZOLVAREA PROBLEMELOR TIP

6.1. METODA FIGUARTIVĂ

Metoda figurativă constă în reprezentarea prin desen a mărimilor necunoscute şi fixarea în acest desen a relaţiilor dintre ele şi mărimile date în problemă. Rolul acestei metode este întrucâtva asemănător cu cel al simbolismului algebric (de exemplu un segment ar putea fi înlocuit cu o literă care ţine locul unui număr/mărime necunoscută, x). Ea ne ajută să formăm schema problemei, să ţinem în atenţie toate condiţiile problemei, să ne concentrăm asupra lor. În rezolvarea mai departe a problemei se introduce o deosebire categorică faţă de algebră; nu aplicăm în mod mecanic un procedeu de rezolvare, ci ne sprijinim tot pe raţionament, folosind înţelesul concret al operaţiilor.

În ce fel trebuie făcută figura care reprezintă enunţul problemei? De cele mai multe ori cel care rezolvă o problemă simte nevoia să-şi apropie datele problemei, precum şi relaţiile dintre acestea din textul enunţului. Pentru aceasta, realizează un desen, o figură, un model, care să oglindească fidel cele de mai sus. Dacă acesta este la început de drum, desenul său este cât mai detaliat, iar pe măsură ce el îşi formează unele priceperi şi deprinderi, figura devine cât mai abstractă, cât mai schematică, ea prinzând în cadrul modelului numai esenţialul.

Problemele care se rezolvă prin metoda figurativă le putem împărţi în două mari categorii, şi anume:

A. Cu date sau mărimi "discrete" , înţelegând prin aceasta că mărimile pot fi numărate câte una şi că se pot pune în corespondenţă după anumite criterii. În acest caz, mărimile le putem figura prin simboluri.

Brat

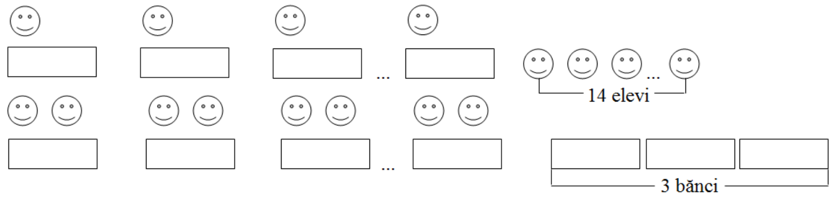
Problema 1

Dacă se aşază câte un elev în bancă, rămân 14 elevi în picioare. Dacă aşezăm câte 2 elevi într-o bancă, rămân 3 bănci libere. Câţi elevi şi câte bănci sunt ?

Scriem datele schematic:

1 elev/bancă.............rămân14 elevi
2 elevi/bancă............rămân 3 bănci
? elevi.........? bănci

Realizăm un desen care să figureze cele de mai sus:



Cum s-a realizat a doua situaţie prezentată în problemă?

Cei 14 elevi care, în prima situaţie stăteau în picioare, s-au aşezat în băncile ocupate iniţial cu câte un elev şi au completat astfel **14 bănci cu câte 2 elevi.**

În a doua situaţie prezentată în problemă avem **3 bănci libere.** Cum au rămas ele libere? S-a ridicat elevul care le ocupa în prima situaţie (deci 3 elevi) şi s-a aşezat lângă un coleg, completând astfel alte 3 bănci?

Aşadar:

a. Câte bănci sunt ?
14 bănci + 3 bănci + 3 bănci = 20 bănci

b. Câţi elevi sunt ?
1 elev x 20 + 14 elevi = 20 elevi + 14 elevi = 34 elevi

Algebric se poate rezolva astfel:

Notăm cu *e* numărul elevilor şi cu *b* numărul băncilor (sau orice alte litere).

Punem în exerciţiu cele două situaţii prezentate în problemă:

$e = 1 \cdot b + 14$

$e = 2 \cdot (b - 3)$

Numărul elevilor este acelaşi. Deci:

$1 \cdot b + 14 = 2 \cdot (b - 3)$

$b + 14 = 2 \cdot b - 2 \cdot 3$

$b + 14 = 2b - 6$

$14 + 6 = 2b - b$

$20 = b$

Deci sunt 20 bănci.

Brat

$e = 1 \cdot b + 14$

$e = 1 \cdot 20 + 14$

$e = 20 + 14$

$e = 34$

Deci sunt 34 de elevi.

R: 34 de elevi şi 20 de bănci

Problema 2

Într-un vas de fructe sunt de 3 ori mai multe prune decât mere. La masă sunt 4 persoane. Fiecare dintre ele îşi ia pe farfurie câte un măr şi câte o prună. Rămân în vas de 4 ori mai multe prune decât mere. Câte prune şi câte mere erau la început în vas ?

Rezolvare

Situaţia de la început arată astfel:

P	P	P	P	P		P	P
MP	MP	MP	MP	MP	...	MP	MP
P	P	P	P	P		P	P

(Fiecărui măr îi corespund 4 prune.)

Cele 4 persoane iau câte un măr şi o prună. Au rămas:

P	P	P	P	P		P	P
				MP	...	MP	MP
P	P	P	P	P		P	P

Deci au rămas 8 prune “izolate” şi grupe de câte un măr cu câte 3 prune fiecare.

În a partea a doua a problemei, enunţul ne indică faptul că rămân în vas de 4 ori mai multe prune decât mere. Se observă uşor că cele 8 prune “izolate” vor completa 8 grupe de forma PPMPP, “obligând” câte o prună să treacă la o grupă de câte un măr cu câte 3 prune pentru a completa până la 4 prune fiecare grupă. Astfel, în vasul cu fructe, rămân 8 mere, după ce fiecare dintre cele 4 persoane au ”servit” câte un măr.

Deci:
a. Câte mere au fost în vas la început?
8 mere + 4 mere = 12 mere (cele 8 rămase şi cele 4 mâncate)

b. Câte prune au fost în vas de la început?
12 prune x 3 = 36 prune

R: În vas au fost 12 mere şi 36 de prune

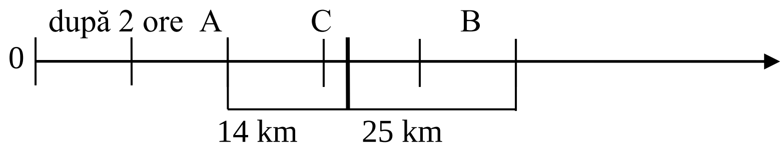
Brat

Problema 3

Un tractor pleacă pe şosea de la kilometrul 0 mergând cu aceeaşi viteză. După 2 ore de mers nu ajunsese încă la canton, mai avea până acolo 14 kilometri. După 5 ore de mers trecuse de respectivul canton cu 25 de kilometri. La ce kilometru era situat cantonul ?

Rezolvare

Din analiza enunţului trebuie să reţinem o informaţie esenţială şi anume aceea că tractorul se deplasează cu o viteză constantă. Realizăm un grafic unde punctul 0 să fie kilometrul 0 (zero) de unde să înceapă deplasarea tractorului. Nu ştim unde trebuie plasat cantonul. Problema spune că, după 2 ore de mers, tractorul nu ajunsese la canton. Convenim ca spaţiul parcurs într-o oră să îl figurăm printr-un segment. Aşezăm două asemenea segmente cap la cap, începând cu punctul 0. Deci după 2 ore tractorul ajunge în punctul A, la o distanţă de 14 km de cantonul C. Poziţia tractorului după 5 ore de la plecare o plasăm în punctul B, la o distanţă de 25 km de cantonul C. Graficul arată astfel:



a. În câte ore parcurge tractorul distanţa AB?
5 ore – 2 ore = 3 ore

b. Ce distanţă parcurge tractorul în acest timp?
14 km + 25 km = 39 km

c. Care este viteza tractorului ?
39 km : 3 ore = 13 km/oră

d. Ce distanţă parcurge tractorul în 2 ore?
13 km/h x 2 h = 26 km

e. La ce kilometru era situat cantonul?
26 km + 14 km = 40 km

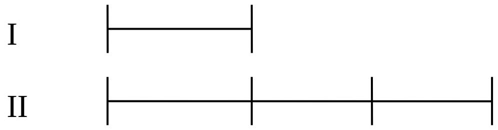
R: Cantonul se află la distanţa de 40 de kilometri.

Brat

B. Cu date sau mărimi "continui", caz în care, le figurăm prin segmente

Personal recomand ca, acolo unde este posibil, să se reprezinte mai întâi mărimea cea mai mică (de obicei printr-un segment) şi apoi pe cea/cele mai mari în funcţie de aceasta.

De exemplu trei segmente egale cu primul, aşezate unul în continuarea celuilalt, pentru a figura un număr de 3 ori mai mare.

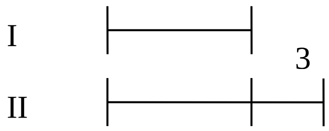


Algebric putem nota:

$I = a$ sau $II = 3 \cdot I$

$II = 3 \cdot a$

Un segment egal cu primul + un alt segment pe care notăm numărul 3 pentru a figura un număr cu 3 mai mare).



$I = a$ sau $II = I + 3$

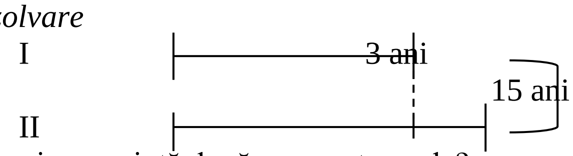
$II = a + 3$

a) Probleme de aflare a numerelor cunoscând suma şi diferenţa lor

Problema 1

Doi fraţi au împreună 15 ani. Unul este mai mare decât celălalt cu 3 ani. Câţi ani are fiecare frate?

Rezolvare



a. Câţi ani reprezintă două segmente egale?
15 ani - 3 ani = 12 ani

b. Câţi ani are al doilea frate ?
12 ani : 2 = 6 ani

c. Câţi ani are primul frate ?
6 ani + 3 ani = 9 ani (sau 15 ani – 6 ani = 9 ani)

Algebric rezolvăm astfel:

$II = I + 3$

$I + II = 15$

Brat

Înlocuim în a doua relaţie II cu I+3:

$I + I + 3 = 15$

$2 \cdot I + 3 = 15$

$2 \cdot I = 15 - 3$

$2 \cdot l = 12$

$I = 12 : 2$

$I = 6$

$II = I + 3$

$II = 6 + 3$

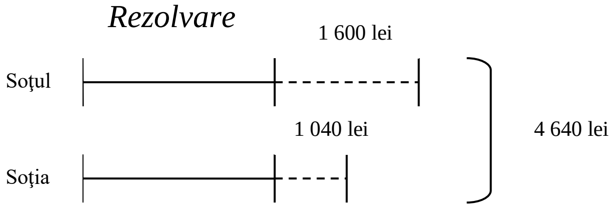
$II = 9$

R: Cei doi fraţi au 9, respectiv 6 ani

Problema 2

Soţul şi soţia câştigă împreună 4 640 de lei lunar. Primul contribuie la cheltuielile comune cu 1 600 lei, iar soţia cu 1 040 lei, rămânând cu sume egale. Care este venitul lunar al fiecăruia dintre soţi?

Rezolvare



a. Care este suma cheltuielilor comune?
1 600 lei + 1 040 lei = 2 640 lei

b. Câţi lei reprezintă cele două segmente egale (suma rămasă celor doi în total)?
4 640 lei - 2 640 lei = 2 000 lei

c. Câţi lei reprezintă un segment egal (suma rămasă fiecăruia)?
2 000 lei : 2 = 1 000 lei

d. Care este venitul lunar al soţului?
1 000 lei + 1 600 lei = 2.600 lei

d. Care este venitul lunar al soţiei?
1 000 lei + 1 040 lei = 2 040 lei
(sau 4 640 lei – 2 600 lei = 2 040 lei)

Algebric rezolvăm astfel:
Notăm cu x suma rămasă fiecăruia.
Deci au avut:
Soţul=x+1600 lei
Soţia=x+1040 lei
Soţul+Soţia=4640 lei

Deci:

Brat

(x+1600)+(x+1040)=4640
x+1600+x+1040=4640
x+x+1600+1040=4640
2x+2640=4640
2x=2640 – 2640
2x=2000
x=2000:2
x=1000 (suma rămasă fiecăruia)

x+1600=1000+1600=2600 lei câştigă soţul
x+1040=1000+1040=2040 lei câştigă soţia

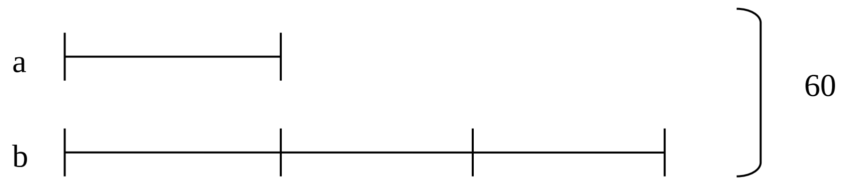
R: Cei doi soţi câştigă lunar suma de 2 600 lei şi, respectiv, de 2 040 lei

b) Probleme de aflare a două numere cunoscând suma sau diferenţa lor şi raportul lor

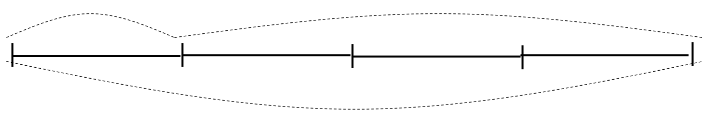
Problema 1

Să se afle două numere ştiind că suma lor este 60 şi că unul este de 3 ori mai mare decât celălalt.

Rezolvare:



SAU



S = 60
a + b = 60

a. Din câte părţi egale este formată suma?
3 părţi + 1 parte = 4 părţi

b. Care este numărul mic (un segment egal)?
60 : 4 = 15

c. Care este numărul mare?
15 x 3 = 45 sau 60 -15 = 45

Algebric putem rezolva astfel:

Brat

$b = 3 \cdot a$

$a + b = 60$

Îl înlocuim pe b cu $3 \cdot a$ în cea de - a doua relaţel :

$a + 3 \cdot a = 60$

$4 \cdot a = 60$

$a = 60 : 4$

$a = 15$

$b = 3 \cdot a$

$b = 3 \cdot 15$

$b = 45$

R: Cele două numere sunt 45 respectiv 15

Problema 2

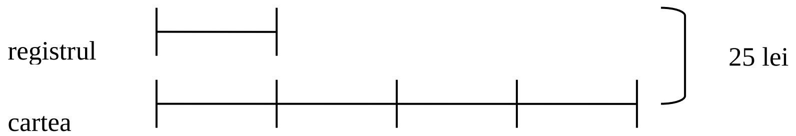
O carte şi un registru costă împreună 23 de lei. Dacă micşorăm cu 2 lei preţul registrului şi mărim cu 4 lei costul cărţii, atunci cartea devine de 4 ori mai scumpă decât registrul. Cât costă fiecare ?

Rezolvare

Aplicăm modificările cerute de problemă:

23 lei – 2 lei = 21 lei ar costa în total dacă s-ar micşora preţului registrului

21 lei + 4 lei = 25 lei ar costa în total dacă s-ar mări preţului cărţii



a. Din câte părţi egale este formată suma?
4 părţi + 1 parte = 5 părţi

b. Cât ar costa registru?
25 lei : 5 = 5 lei

c. Cât ar costa cartea?
5 lei x 4 = 20 lei

d. Cât costă registrul?
5 lei x 2 lei = 7 lei

e. Cât costă cartea?
20 lei – 4 lei = 16 lei

Algebric putem rezolva astfel:

Brat

$c = 4 \cdot r$

$r + c = 25$

Înlocuim c cu $4 \cdot$ r în cea de - a doua relatie :

$r + 4 \cdot r = 25$

$5 \cdot r = 25$

$r = 25 : 5$

$r = 5$ lei (ar costa registrul)

$c = 4 \cdot r$

$c = 4 \cdot 5$

$c = 20$ lei (ar costa cartea)

$5 + 2 = 7$ lei (costă registrul)

$20 - 4 = 16$ lei (costă cartea)

R: Registrul a costat 7 lei, iar cartea 16 lei.

Brat

6.2. PROBLEME DE EGALARE A DATELOR. METODA COMPARAŢIEI

Sunt unele probleme de aritmetică în care se cere să se afle două mărimi legate prin relaţii care în algebră dau un sistem de două ecuaţii liniare cu două necunoscute. Procedeul aritmetic se aseamănă cu procedeul algebric de rezolvare a unui asemenea sistem: eliminarea uneia dintre necunoscute.

În algebră un asemenea sistem se rezolvă prin scădere sau adunare, după egalarea prealabilă a coeficienţilor sau prin eliminarea unei necunoscute prin substituţie. În acelaşi mod se rezolvă şi în aritmetică, eliminând una din mărimile necunoscute prin scădere, după egalarea datelor.

a) Probleme care se rezolvă prin eliminarea uneia din necunoscute cu ajutorul scăderii

Problema 1

De la o cofetărie un elev a cumpărat 4 prăjituri şi 6 sucuri plătind 28 de lei. Altădată, la aceleaşi preţuri, a cumpărat 4 prăjituri şi 8 sucuri plătind 32 de lei. Câţi lei costă o prăjitură şi câţi lei costă un suc ?

Rezolvare

4 prăjituri……….6 sucuri……….28 lei
4 prăjituri……….8 sucuri……….32 lei

A doua oară a cumpărat mai mult, motiv pentru care a şi plătit mai mult.

a. Cu câte sticle cu suc a cumpărat mai mult a doua oară?
8 sticle – 6 sticle = 2 sticle

b. Cât costă două sticle cu suc (cu cât a plătit mai mult a doua oară)?
32 lei – 28 lei = 4 lei

c. Cât costă o sticlă cu suc?
4 lei : 2 = 2 lei

d. Cât costă 6 sucuri?
2 lei x 6 = 12 lei

e. Cât costă 4 prăjituri?
28 lei – 12 lei = 16 lei

f. Cât costă o prăjitură?
16 lei : 4 = 4 lei

R: O prăjitură costă 4 lei şi un suc costă 2 lei

Brat

Problema 2

Un elev cumpără 7 pixuri şi 3 stilouri cu 141 lei. Altă dată, cu aceleaşi preţuri, pe 2 pixuri şi 6 stilouri dă 246 lei. Câţi lei costă un pix şi câţi lei costă un stilou ?

Rezolvare

7 pixuri……….3 stilouri……….141 lei / ×2
2 pixuri……….6 stilouri……….246 lei

Observăm că cel mai uşor este să egalăm datele în privinţa stilourilor. Pentru aceasta înmulţim datele de pe primul şir cu 2 apoi scădem mărimile rămase.

14 pixuri………..6 stilouri……….282 lei
2 pixuri…………6 stilouri……….246 lei
_______________________________ _ (minus)
12 pixuri...........\ stilouri..........36 lei

a. Cu câte pixuri a cumpărat mai mult prima oară?
14 pixuri – 2 pixuri = 12 pixuri

b. Cât costă 12 pixuri (cu cât a plătit mai mult prima oară)?
282 lei – 246 lei = 36 lei

c. Cât costă un pix?
36 lei : 12 = 3 lei

d. Cât costă 7 pixuri?
3 lei x 7 = 21 lei

e. Cât costă 3 stilouri?
141 lei – 21 lei = 120 lei

f. Cât costă un stilou?
120 lei : 3 = 60 lei

R: Un pix costă 3 lei iar un stilou 40 de lei.

Brat

b) Probleme de eliminare a unei necunoscute prin înlocuirea ei (pe baza relaţiilor din problemă) în funcţie de cealaltă mărime necunoscută

Problema 1

Un kilogram de ceai şi 16 pachete de biscuiţi costă 360 de lei. Un kilogram de ceai este de 14 ori mai scump decât un pachet de biscuiţi. Cât costă 1 kilogram de ceai şi cât costă un pachet de biscuiţi ?

Rezolvare

1 kg ceai
16 pachete de biscuiţi } 360 lei

Din enunţul problemei se vede că 1 kg de ceai = 14 pachete de biscuiţi.

a. Câte pachete de biscuiţi s-ar putea cumpăra de 360 lei?
14 pachete + 16 pachete = 30 pachete

b. Cât costă un pachet de biscuiţi?
360 lei : 30 = 12 lei

c. Cât costă un kg de ceai?
12 lei x 14 = 168 lei

R: Un kilogram de ceai costă 168 de lei şi un pachet de biscuiţi costă 12 lei.

Problema 2

S-au cumpărat 3 pixuri şi 7 creioane cu 23 de lei. Pentru 3 pixuri s-a plătit cu 1 leu mai mult decât pentru 4 creioane. Să se afle preţul unui pix şi al unui creion.

Rezolvare

3 pixuri
7 creioane } 23 lei

Din enunţul problemei se vede că 3 pixuri = 4 creioane - 1 leu.
a. Câte creioane s-ar putea cumpăra?
4 creioane + 7 creioane = 11 creioane

b. Cât ar costa 11 creioane?
23 lei – 1 leu = 22 lei

c. Cât costă un creion?
22 lei : 11 = 2 lei

d. Cât costă 7 creioane?
2 lei x 7 = 14 lei

e. Cât costă 3 pixuri?
23 lei – 14 lei = 9 lei

f. Cât costă un pix?
9 lei : 3 = 3 lei

R: Un pix costă 3 lei, iar un creion costă 2 lei.

Brat

6.3. PROBLEME DE PRESUPUNERE. METODA FALSEI IPOTEZE

Problemele din această categorie sunt foarte numeroase. Afirmăm chiar că orice problemă ale cărei date sunt mărimi proporţionale poate fi rezolvată prin metoda falsei ipoteze. În ce constau ele?

De regulă se pleacă de la întrebarea problemei, în sensul că asupra mărimii pe care o căutăm facem o presupunere complet arbitrară. Ce se întâmplă în această situaţie ? Se reface problema pe baza presupunerii făcute. Deoarece mărimile sunt proporţionale, rezultatele obţinute pe baza presupunerii se "translatează" în plus sau în minus, după cum şi presupunerea făcută este mai mică sau mai mare decât rezultatul real.

Refăcând aşadar problema se ajunge la un rezultat care nu concordă cu rezultatul real din cadrul problemei, el este fie mai mare, fie mai mic decât acesta. În acest moment se compară rezultatul, pe baza presupunerii cu cel real din punct de vedere al câtului şi se observă de câte ori s-a greşit când s-a făcut presupunerea. Se obţine astfel un număr cu ajutorul căruia "se corectează" presupunerea făcută, în sensul că se micşorează sau se măreşte de un anumit număr de ori.

Problema 1

Într-o curte a unei gospodării se află găini şi oi. Câte animale sunt din fiecare fel, ştiind că toate au 19 capete şi 46 de picioare ?

Rezolvare

19 capete................ 46 picioare $\begin{cases} \text{2 picioare} \\ \text{4 picioare} \end{cases}$

Presupunem că ar fi numai găini:
a. Câte picioare ar fi, pe baza presupunerii?
2 picioare x 19 = 38 picioare

b. Cu cât s-a greşit presupunerea?
46 picioare – 38 picioare = 8 picioare

c. Câte picioare are în plus o oaie faţă de o găină?
4 picioare – 2 picioare = 2 picioare

d. Câte oi sunt?
8 picioare : 2 picioare = 4 (oi)

e. Câte găini sunt?
19 capete – 4 capete = 15 capete (găini)

R: Sunt 4 oi şi 15 găini

Brat

Problema 2

Pe un vapor s-au vândut 124 de bilete pentru clasele I-a şi a II-a; biletul de clasa I costă 56 lei, iar cel de clasa a II-a 36 de lei, încasându-se în total suma de 4 944 lei. Câte bilete de fiecare clasă s-au vândut ?

Rezolvare

Presupunem că toate cele 124 de bilete ar fi de clasa I.

a. Aflăm cât costă acestea.

56 lei x 124 = 6 944 lei

b. Aflăm cu câţi lei am obţinut mai mult decât pe baza presupunerii făcute.

6 944 lei – 4 944 lei = 2 000 lei

c. Aflăm cu câţi lei am socotit mai scump un bilet de clasa a II-a.

56 lei – 36 lei = 20 lei

d. Aflăm câte bilete de clasa a II-a s-au vândut.

2 000 lei : 20 lei = 100 (bilete)

e. Aflăm câte au fost biletele de clasa I.

124 bilete – 100 bilete = 24 bilete

R: S-au vândut 24 de bilete de clasa I şi 100 de bilete de clasa a II-a

Brat

6.4. PROBLEME DIN REST ÎN REST. METODA MERSULUI INVERS (METODA RETROGRADĂ)

Sunt unele probleme alcătuite în aşa fel, încât relaţiile dintre mărimi depind unele de celelalte într-o ordine succesivă. Pentru a rezolva cu uşurinţă o problemă de acest gen, se analizează ultima relaţie faţă de penultima, se alcătuieşte câte o problemă simplă şi se fac calculele. Rezultatul obţinut de fiecare dată se foloseşte în alcătuirea altor probleme simple. Ordinea alcătuirii lor este inversă ordinii în care sunt date relaţiile din problemă. Din rezolvarea ultimei probleme simple se ajunge la rezultatul cerut.

Problema 1

Avem două grămezi cu nuci. Punem din prima grămadă în a doua atât cât conţinea a doua. Apoi punem din cea de a doua grămadă în prima atât cât conţinea prima. În sfârşit, punem din nou din grămada I în a doua atât cât conţine a doua. La sfârşit se găsesc în fiecare grămadă câte 24 de nuci. Câte nuci au fost la început în fiecare grămadă ?

Rezolvare

	Grămada I	Grămada II
După operaţia a III-a	24	24
După operaţia a II-a	24 + 12 = 36	24 : 2 = 12
După operaţia I	36 : 2 = 18	12 + 18 = 30
La început	18 + 15 = 33	30 : 2 = 15

R: La început prima grămadă conţinea 33 de nuci, iar a doua 15

Problema 2

Îndoitul unui număr mărit cu 3 a fost înmulţit cu 4. Produsul obţinut, micşorat cu 5, a fost împărţit la 9 şi s-a obţinut 15. Care a fost numărul iniţial ?

Rezolvare

15 x 9 = 135
135 + 5 = 140
140 : 4 = 35
35 - 3 = 32
32 : 2 = 16

R: Numărul iniţial a fost 16

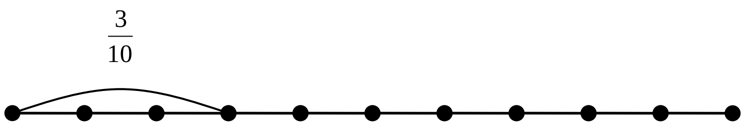
Brat

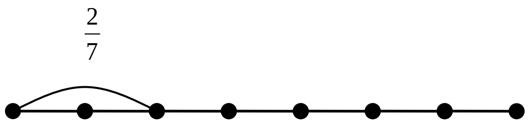
Problema 3

Un călător are de făcut un drum. În prima zi merge 3/10 din lungimea lui, în a doua face 2/7 din rest, în a treia 3/5 din noul rest şi a patra zi ultimii 20 de kilometri. Care este lungimea drumului ?

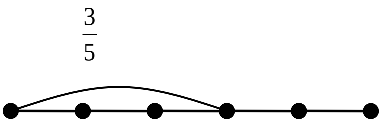
Rezolvare

1. 

2. 

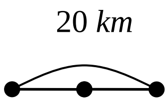
3. 

Varianta I

4. 

a. Cât reprezintă $\frac{1}{10}$ din drumul parcurs ?

20 km : 2 = 10 km

5. 

b. Care este lungimea drumului ?

10 km x 10 = 100 km

Varianta a II-a

a. A câta parte din restul II sunt cei 20 de kilometri ?

$$\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

b. Aflăm al doilea rest

$$20km:\frac{2}{5}=20km\cdot\frac{5}{2}=50km$$

c. Aflăm a câta parte din restul I reprezintă restul II

$$\frac{7}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

d. Aflăm restul I

$$50km:\frac{5}{7}=50km\cdot\frac{7}{5}=70km$$

e. Aflăm a câta parte din lungimea drumului este restul I

$$\frac{10}{10}-\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$$

f. Aflăm lungimea drumului

$$70km:\frac{7}{10}=70km\cdot\frac{10}{7}=100km$$

R: Drumul parcurs are lungimea de 100 de kilometri

Brat

6.5. PROBLEME REZOLVABILE CU REGULA DE TREI SIMPLĂ sau cu METODA REDUCERII LA UNITATE

Definiţia 1: Două mărimi care depind una de alta se numesc direct proporţionale dacă îndeplinesc condiţiile:

a) Dacă una creşte şi cealaltă creşte;

b) Dacă una creşte de *n* ori ($n \in N^*$), atunci cealaltă creşte de acelaşi număr de ori.

Teorema 1: Raportul a două valori ale uneia dintre mărimi este egal cu raportul valorilor corespunzătoare ale celeilalte mărimi: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Definiţia 2: Două mărimi care depind una de alta se numesc invers proporţionale dacă îndeplinesc condiţiile:

a) Dacă una creşte, cealaltă descreşte;

b) Dacă una creşte de *n* ori ($n \in N^*$), atunci cealaltă descreşte de *n* de ori.

Teorema 2: Fiind date două mărimi invers proporţionale, raportul a două valori ale uneia dintre mărimi este egal cu inversul raportului dintre valorile corespunzătoare ale aceleiaşi mărimi: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

Să analizăm demersul metodic pornind de la rezolvarea următoarelor probleme (demers general):

Cunoscând o pereche de valori corespunzătoare x_1, y_1, la două mărimi direct (invers) proporţionale x, y, să se afle ce valoare corespunde unei alte valori date x_2.

Se cunosc două metode de rezolvare a unei asemenea probleme, şi anume:

a) Metoda proporţiilor;

b) Metoda reducerii la unitate.

Pentru a degaja metodele, vom porni de la un exemplu concret:

Brat

Problema 1. O cantitate de 250 kg cartofi a fost ambalată în 10 lăzi. În câte lăzi se vor ambala 375 kg cartofi?

Rezolvare prin Metoda I – Metoda proporţiilor

Aşezăm datele problemei pe două şiruri astfel:

250 kg ....10 lăzi $\qquad x_1$...............y_1

375 kg ....x lăzi $\qquad x_2$..............y_2

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

În această problemă, cele două mărimi, cantitatea de cartofi şi numărul de lăzi, sunt direct proporţionale (creşte numărul kilogramelor, creşte şi numărul lăzilor).

Pe primul şir (rând) se scriu cele două valori corespunzătoare date.

Pe al doilea şir (rând) se scrie o valoare dată a uneia dintre mărimi şi valoarea corespunzătoare, necunoscută, a celeilalte mărimi.

Deoarece cele două mărimi sunt direct proporţionale, conform teoremei 1, putem scrie:

$$\frac{250\,kg}{375\,kg} = \frac{10\,lazi}{x\,lazi}$$

Deoarece raportul a două mărimi este egal cu raportul numerelor care le măsoară, avem:

$$\frac{250}{375} = \frac{10}{x}$$

$$x = \frac{375 \cdot 10}{250} = 15 \text{ (lăzi)}$$

În general, scriem: x_1...............y_1

x_2..............y_2

Dacă x_1, y_2 şi x_2 sunt date, atunci $y_2 = y_1 \cdot \frac{x_2}{x_1}$.

Metoda aplicată în rezolvarea acestei probleme se numeşte *metoda proporţiilor.*

Rezolvare prin metoda a II-a – Metoda reducerii la unitate

Cea mai des folosită în rezolvarea problemelor care conţin mărimi direct proporţionale este *metoda reducerii la unitate*. Această metodă constă în compararea mărimilor date în problemă, cu aceeaşi mărime, luată ca unitate.

Să rezolvăm aceeaşi problemă, dar în alt mod.

Aşezăm datele problemei ca mai înainte, pe două şiruri, în mod corespunzător:

250 kg ....10 lăzi

375 kg ....x lăzi

Bnat

Gândim astfel: dacă 250 kg se ambalează ***în 10 lăzi***, atunci ***într-o ladă*** câte kilograme se ambalează? Mai multe sau mai puţine? Evident că mai puţine? De câte ori mai puţine?

10 : 1 = 10

De 10 ori, deoarece sunt mărimi direct proporţionale şi, dacă una dintre ele (numărul de lăzi) s-a micşorat, atunci şi cealaltă (cantitatea de cartofi) se va micşora tot de 10 de ori. Deci într-o ladă se vor ambala 25 kg cartofi. Se cheamă că *am redus la unitate* (în cazul nostru la o ladă) *mărimea reprezentată prin numărul de lăzi.* Acum introducem datele pentru ambalarea a 375 kg de cartofi.

Dacă într-o ladă se ambalează 25 kg cartofi, atunci 375 kg în câte lăzi se vor ambala?

375 : 25 = 15 lăzi

Raţionamentul de mai sus se scrie sintetic astfel:

250 kg ....10 lăzi

250:10=25 kg...........................1 ladă

375 kg ....375:25=15 lăzi

Această metodă (reducerii la unitate) este aplicabilă problemelor din programa de clasa a IV-a, deoarece ea urmăreşte un raţionament mai apropiat de înţelegerea concretă a elevilor. Metoda proporţiilor cere însă cunoştinţe matematice pe care elevii le parcurg abia la gimnaziu.

Problema 2. un număr de 26 de lucrători sapă un şanţ în 17 zile. În câte zile vor săpa acelaşi şanţ 34 de lucrători?

Rezolvare prin metoda proporţiilor:

Aşezăm datele astfel:

26 lucrători ....17 zile

34 lucrători......................................*x* zile

Stabilim cele două mărimi: lucrătorii şi zilele.

Ele sunt mărimi invers proporţionale deoarece se stabileşte uşor că dacă prima (numărul lucrătorilor) creşte, atunci a doua mărime (numărul de zile) va descreşte de acelaşi număr de ori. Stabilim că cele două mărimi sunt invers proporţionale, putem scrie, în conformitate cu teorema 2, că:

$$\frac{26\,\text{lucratori}}{34\,\text{lucratori}} = \frac{\text{x zile}}{17\,\text{zile}} \text{ sau, general: } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

Deoarece raportul a două valori ale unei mărimi este egal cu raportul numerelor care le măsoară, avem:

$$\frac{26}{34} = \frac{x}{17},\quad x = \frac{26\cdot 17}{34} = 13\,(\text{zile}).$$

Brat

Aşadar, în general, scriem:

x_1..................................y_1

x_2..................................y_2 , unde x şi y sunt mărimi invers proporţionale.

Dacă x_1, y_1 si y_2 sunt date, atunci $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ si $y_2 = y_1 \cdot \frac{x_1}{x_2}$.

Rezolvare prin metoda reducerii la unitate:

Aşezăm datele astfel:

26 lucrători ....17 zile

34 lucrători.......................................*x* zile

Deci: 26 lucrători ....17 zile

1 lucrător.................................17 · 26 zile=442 zile

34 lucrători..................................442 : 34 = 13 zile

6.6. PROBLEME DE MIŞCARE

Legea mişcării uniforme, exprimată simbolic $d = v \cdot t$, este esenţială în rezolvarea problemelor cărora le zicem "de mişcare uniformă". În clasa a IV-a elevii rezolvă asemenea probleme şi ele constau în determinarea unei mărimi atunci când se cunosc celelalte două. Din motive metodologice, la nivelul claselor I-IV, problemele de mişcare se clasifică în două categorii:

a)probleme de mişcare în acelaşi sens (numite şi probleme de urmărire);

b) probleme de mişcare în sensuri contrare.

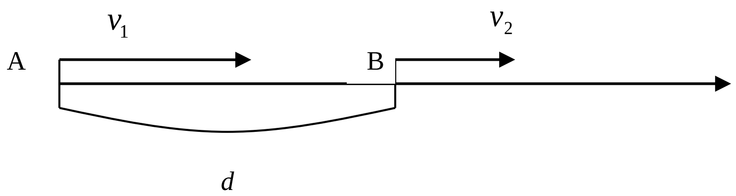
a) Probleme de mişcare în acelaşi sens

Analizăm următoarea problemă generală:

Două mobile pleacă în acelaşi timp şi în acelaşi sens din două puncte *A* şi *B*, situate la distanţa *d* unul de celălalt. Cel plecat din *B* merge cu viteza v_2, iar cel plecat din *A* cu viteza v_1. După cât timp cel plecat din *A* îl ajunge pe cel plecat din *B* (după cât timp se întâlnesc)?

Rezolvare:

Să figurăm traiectoria rectilinie pe care se mişcă cele două mobile indicând printr-o săgeată şi sensul mişcării. Să mai observăm că $v_1 > v_2$, pentru că numai astfel se pune problema ca mobilul plecat din *A* să-l ajungă pe cel plecat din *B*.



Am mai figurat prin segmente orientate vitezele celor două mobile.

Brat

Deci mobilul din *A* îl urmăreşte pe cel din *B* de care îl desparte distanţa *d*. Pentru a afla după cât timp îl ajunge, sau după cât timp recuperează decalajul de distanţă *d*, ar trebui să aflăm mai întâi cu cât se apropie într-o unitate de timp sau cu cât sunt exprimate în km/h (prin viteză înţelegem distanţa parcursă de un mobil în unitatea de timp) şi distanţa *d* în km, formulând întrebarea:

Cu cât se apropie mobilul *A* de cel din *B* într-o oră?

Răspunsul este: cu v_1 km - v_2 km.

Dacă într-o oră mobilul din *A* recuperează din distanţa d $(v_1 - v_2)$ km, atunci întreaga distanţă *d* care le desparte o va recupera într-un număr de ore egal cu de câte ori $(v_1 - v_2)$ se cuprinde în distanţa *d*, adică $\frac{d}{v_1 - v_2}$ ore.

Deci, *planul logic şi operaţiile* exprimate simbolic vor fi:

1. Cu cât se apropie cele două mobile într-o oră?

$$(v_1 - v_2)$$

2. După cât timp se întâlnesc?

$$\frac{d}{v_1 - v_2}$$

Concentrând cele două secvenţe într-un singur exerciţiu, găsim că timpul după care două mobile care se urmăresc se întâlnesc este: $t = \frac{d}{v_1 - v_2}$.

Problema 1

Un grup de elevi care merg cu 5 km/h iese din oraş la ora 7 dimineaţa. La ora 14, în aceeaşi zi, se trimite după el un curier care se deplasează cu 12 km/h. După cât timp şi la ce distanţă de oraş curierul va ajunge grupul de elevi?

Rezolvare

Din enunţ reiese că problema este de mişcare, şi anume de *urmărire*. Curierul urmăreşte grupul de elevi. Trebuie însă să stabilim în ce moment începe urmărirea şi la ce distanţă de oraş se află grupul de elevi în momentul plecării curierului.

a. Cât timp merge grupul de elevi singur (până la plecarea curierului)?

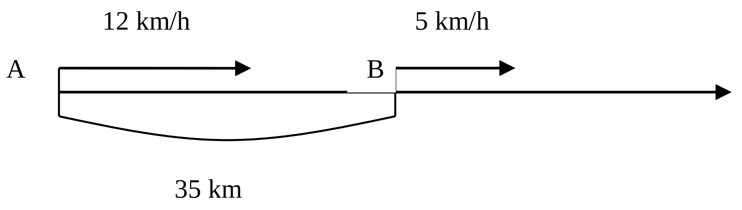
14 ore – 7 ore = 7 ore

b. Ce distanţă parcurge grupul de elevi până în momentul plecării curierului?

$5\text{ km/ora} \cdot 7\text{ ore} = 35\text{ km}$

Brat

Grafic, din acest moment, lucrurile se prezintă astfel:



c. Cu cât se apropie curierul de grupul de elevi în fiecare oră?

12 km – 5 km = 7 km

d. După câte ore se întâlnesc?

35 km : 7 km/oră = 5 ore

e. La ce distanţă de oraş se face întâlnirea?

$12 \cdot 5 = 60$ km

sau $5 \cdot (7 + 5) = 60$ km

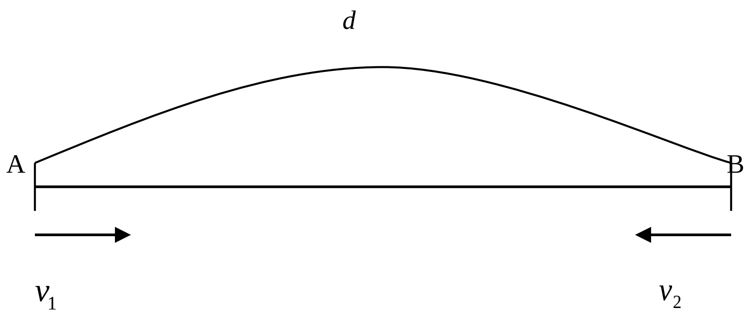
b) Probleme de mişcare în sensuri contrare

Analizăm următoarea problemă generală:

Două mobile pleacă unul către celălalt din două puncte *A* şi *B* situate la distanţa *d*. Cel din *A* cu viteza v_1 şi cel din *B* cu viteza v_2. După cât timp se întâlnesc?

Rezolvare:

Realizăm o schemă grafică:



Am figurat cele două puncte *A* şi *B* situate la distanţa *d* unul de celălalt. Am mai figurat vitezele celor două mobile v_1 şi v_2. (Aici nu are importanţă care dintre ele este mai mare.) Întrebarea este:

După cât timp se întâlnesc?

Pentru a răspunde la această întrebare, este util să aflăm cu cât se apropie cele două mobile unul de celălalt într-un interval de timp, în cazul nostru, într-o oră.

Brat

Răspunsul este evident: cu suma vitezelor. Deci ele recuperează din distanţa d care le separă, $(v_1 + v_2)$ km într-o oră. Înseamnă că toată distanţa *d* o vor recupera (deci se vor întâlni) după atâtea ore, de câte ori $(v_1 + v_2)$ se cuprinde în toată distanţa *d*.

Deci, *planul logic al problemei şi operaţiile* exprimate simbolic vor fi:

1. Cu cât se apropie cele două mobile într-o oră?

$$(v_1 + v_2)$$

2. După cât timp se întâlnesc?

$$\frac{d}{v_1 + v_2}$$

Aceasta este formula după care calculăm timpul de întâlnire într-o problemă de mişcare în sensuri contrare: $t = \dfrac{d}{v_1 + v_2}$

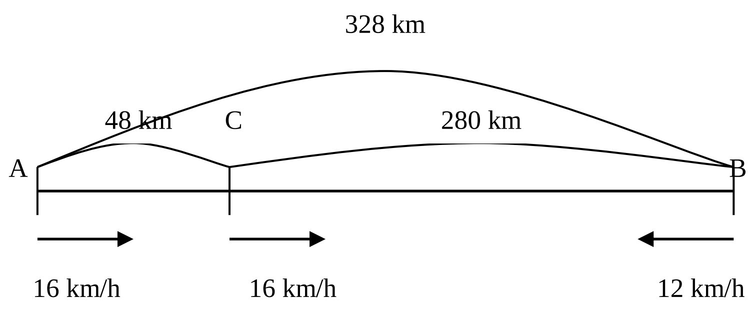
Problema 2

Din oraşul *A* a plecat la ora 11 dimineaţa un biciclist îndreptându-se spre oraşul *B*. El parcurge 16 km/h. După 3 ore a plecat un al doilea biciclist din oraşul *B* spre oraşul *A* cu o viteză de 12 km/h. Când şi unde se vor întâlni ei, dacă distanţa între *A* şi *B* este 328 km?

Rezolvare

Recunoaştem din enunţ o problemă de mişcare în sensuri contrare. Cunoaştem vitezele celor două mobile (în cazul nostru vitezele bicicliştilor) şi trebuie să stabilim la ce distanţă se aflau unul de celălalt în momentul când începem să considerăm mişcarea unuia către celălalt.

Reprezentăm grafice astfel:



a. Ce distanţă a parcurs biciclistul din A în 3 ore, adică până în momentul plecării celui din B (distanţa AC)?

$16 \cdot 3 = 48$ km

b. La ce distanţă se aflau cei doi biciclişti, unul de celălalt în momentul plecării celui din B (distanţa CB)?

328 – 48 = 280 km

Brat

Din acest moment problema s-a redus la o *problemă tipică de mişcare în sensuri contrare*. Pentru a afla după cât timp se întâlnesc, fie aplicăm formula $t = \frac{d}{v_1 + v_2}$, fie gândim analitic ca în cele două secvenţe prin care am stabilit formula.

c. Aflăm după cât timp se întâlnesc.

$$t = \frac{d}{v_1 + v_2} = \frac{280}{16+12} = \frac{280}{28} = 10 \text{ ore}$$

Deci cei doi biciclişti se întâlnesc după 10 ore de la plecarea celui din B sau la 10 + 3 = 13 ore după plecarea celui din A.

e. unde se întâlnesc (la ce distanţă de oraşul A)?

$16 \cdot 31 = 208 \text{ km}$

Răspuns: 208 km

VII. BIBLIOGRAFIE

1. Birgean, Simona, Nicoară, Carmen, Calinin, Adriana, *În ţara matematicii! – exerciţii şi probleme pe nivele de dificultate*, Editura „Paralela 45”, Piteşti, 2007;

2. Blaga, Alexandru, Oprea Andrei, Ovidiu Pop (coord.), *Matematică de performanţă pentru clasa a IV-a,* Editura „Optil Graphic”, Craiova, 2006;

3. Călugăriţa, Angelica, *Exerciţii şi probleme de matematică pentru elevii claselor I-IV*, Editura „Universal Pan”, Bucureşti, 2006;

4. Constantinescu, Dragoş, Paul Dumitrescu, Ştefan Smărăndoiu, *Probleme de matematică pentru clasele III-IV*, Editura „Şcoala cu Ceas”, Râmnicu Vâlcea, 2003;

5. Dăcilă, Eduard, Dăcilă, Ioan, *Matematica – Ghidul învăţătorului, ediţie revăzută şi completată*, Editura „Iulian”, Bucureşti, 2008;

6. Gardin, Maria, Gardin, Florin, Berechet, Daniela, Berechet, Florian, Constanţa Badea, *Matematică – culegere de exerciţii şi probleme,* clasa a III-a, Editura „Paralela 45”, Piteşti, 2007;

7. Gherghina, Dumitru coord., *Matematică distractivă – exerciţii şi probleme, teste recapitulative, clasele III-VI*, Editura „Didactica Nova”, Craiova, 2004;

8. Neacşu, Ioan coord., *Metodica predării matematicii la clasele I-IV,* manual pentru liceele pedagogice, clasele XI-XII, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988;

9. Pop, Aurelia Maria, *Culegere de probleme – material pentru elevii isteţi*, Editura „Roprint”, Cluj-Napoca, 2007.

10. Roşu, Elena Diana, *Rezolvarea problemelor de matematică în ciclul primar,* Editura Sitech, Craiova, 2008;